Zadania wstępne

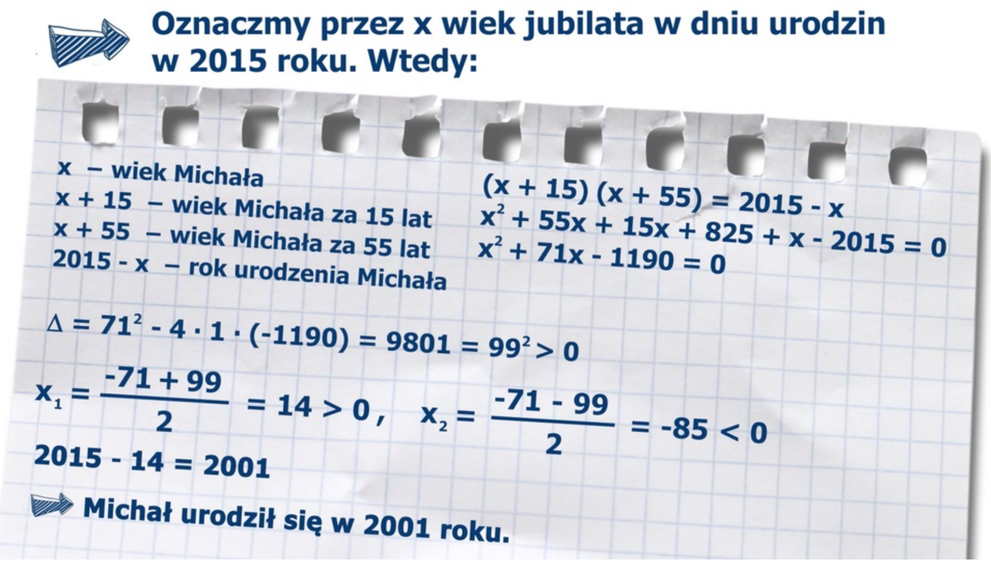
Rozwiązania zadań tekstowych, przy rozwiązywaniu których wykorzystywane są równania kwadratowe. Liczba przekątnych wielokąta. Animacja: przykładowy zapis rozwiązania zadania tekstowego.
Przykłady rozwiązań zadań tekstowych z wykorzystaniem równań kwadratowych. Animacja: równanie kwadratowe opisujące koszt przejazdu autobusem.

Zadania wstępne

Pokażemy teraz kilka przykładowych zadań tekstowych, w których interpretacja danych zapisanych w ich treści doprowadzi do równania kwadratowego.

Przykład 1

W roku 2015
na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli wiek, który osiągnę za 15
lat pomnożę przez wiek, który osiągnę za 55
lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. W którym roku urodził się ten jubilat?



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

"W roku 2015 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek, który osiągnę za 15 lat pomnożę przez swój wiek, który osiągnę za 55 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia”. W którym roku urodził się ten jubilat? Oznaczmy przez x wiek jubilata w dniu urodzin w 2015 roku. Wtedy: rok urodzenia jubilata to 2015 ?x

---

Odpowiedź: Jubilat urodził się w 2001
roku.

Przykład 2

Liczba wszystkich przekątnych pewnego wielokąta foremnego jest równa 135
. Ile boków ma ten wielokąt?
Oznaczmy liczbę boków wielokąta przez n
. Wówczas liczba jego przekątnych jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$
.
Otrzymujemy równanie

$$\frac{n(n-3)}{2} = 135.$$

Stąd

$$n^2 - 3n = 135 \cdot 2$$

$$n^2 - 3n - 270 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 1089 = 33^2$$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania, którymi są $n_1 = \frac{3+33}{2} = 18$ oraz $n_2 = \frac{3-33}{2} = -15$.

Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba boków nie może być ujemna. Zatem ten wielokąt jest osiemnastokątem.

Odpowiedź: Ten wielokąt ma osiemnaście boków.

Przykład 3

Pole powierzchni bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest równe 280. Krawędź podstawy jest o 3 krótsza od krawędzi bocznej. Oblicz objętość V tego prostopadłościanu.

Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy prostopadłościanu. Wtedy długość jego krawędzi bocznej jest równa $x + 3$, a pole powierzchni bocznej jest równe $4 \cdot x \cdot (x + 3)$. Otrzymujemy równanie

$$4x(x + 3) = 280.$$

Stąd

$$x(x + 3) = 70$$

$$x^2 + 3x = 70$$

$$x^2 + 3x - 70 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

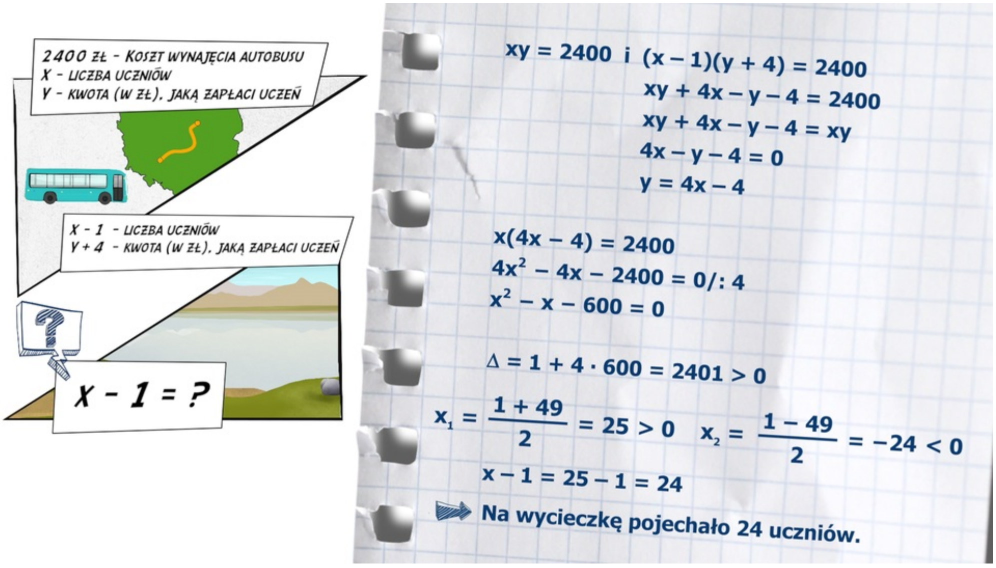
$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 289 = 17^2.$$

Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania, którymi są $x_1 = \frac{-3+17}{2} = 7$ oraz $x_2 = \frac{-3-17}{2} = -10$.

Tylko pierwsze z nich spełnia warunki zadania, co oznacza, że jest to prostopadłościan o wymiarach $7, 7$ i 10, a więc jego objętość V jest równa 490.

Odpowiedź: $V = 490$.

Przykład 4



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Koszt wynajęcia autobusu do przewozu grupy uczniów na warsztaty matematyczne z miejsca zamieszkania do Domu Wczasów Dziecięcych wynosi 2400 zł. Podzielono tę kwotę na równe części, by każdy z uczniów zgłoszonych do udziału w warsztatach płacił tyle samo. Jeden z uczniów tej grupy zrezygnował z wyjazdu na warsztaty i w efekcie każdy z uczestników warsztatów zapłacił za przejazd o 4 zł więcej, niż planowano. Ustalimy, ilu uczniów brało udział w tych warsztatach. Oznaczmy przez x liczbę uczniów, którzy zgłosili chęć udziału w warsztatach, a przez y – kwotę (w złotych) opłaty za przejazd, która przypadła na zgłoszonego uczestnika. Wtedy x razy y=2400. Po rezygnacji jednego z uczniów w warsztatach uczestniczyło x ?1 osób, a każda z nich zapłaciła za przejazd (y +4)zł. Zatem (x ?1) razy (y +4) =2400. Wynika stąd, że x razy −y +4x ?4= 2400. Uwzględniając x razy y =2400, otrzymamy równanie ?y +4x ?4 =0, z którego wyznaczymy niewiadomą y y =4x ?4. Uwzględniając z kolei tę zależność w równaniu x razy y=2400, otrzymamy X razy (4x ?4) =2400. Przekształcamy to równanie do postaci x kwadrat −x ?600 =0 Obliczamy wyróżnik: Delta =(?1) kwadrat ?4 razy 1 razy (?600)= 2401 =492. Równanie ma więc dwa rozwiązania, którymi są x z indeksem dolnym jeden =25 oraz x z indeksem dolnym dwa =?24. Drugie z rozwiązań odrzucamy, gdyż liczba uczniów nie może być ujemna. Zatem do udziału w warsztatach zgłosiło się 25 uczniów, a 24 uczniów brało w nich udział. Odpowiedź: W warsztatach brało udział 24 uczniów.

Przykład 5

Geodeta wytyczył teren pod dwie prostokątne działki. Pierwsza działka ma powierzchnię $5600\ m^2$
. Druga działka ma długość o 20 m
większą i szerokość o 5 m
większą niż pierwsza oraz powierzchnię większą o $1900\ m^2$
. Obliczymy wymiary obu działek.
Wprowadzamy oznaczenia:
x
– długość pierwszej działki (w metrach),
y
– szerokość pierwszej działki (w metrach).
Ponieważ jej powierzchnia jest równa $5600\ m^2$
, więc $xy = 5600$
.
Wtedy druga działka ma wymiary:
długość: $(x + 20)$ m

oraz szerokość: $(y + 5)$ m
,
a skoro jej pole jest równe $(5600 + 1900)\ m^2$
, więc

$$(x + 20)(y + 5) = 7500$$

Uwzględniamy w tym równaniu zależność $xy = 5600$
i przekształcamy je do postaci

$$x = 360 - 4y.$$

Stąd

$$(360 - 4y)y = 5600$$

$$-4y^2 + 360y = 5600$$

$$y^2 - 90y + 1400 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = (-90)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1400 = 2500 = 50^2.$$

Równanie ma więc dwa rozwiązania, którymi są $y_1 = \frac{90+50}{2} = 70$
oraz $y_2 = \frac{90-50}{2} = 20$
.
Zatem możliwe są dwa przypadki:
pierwsza działka ma wymiary 80 m
i 70 m
i wtedy druga ma wymiary 100 m
i 75 m
lub
pierwsza działka ma wymiary 280 m
i 20 m
i wtedy druga ma wymiary 300 m
i 25 m
.
Odpowiedź: Możliwe są dwa rozwiązania: pierwsza działka ma wymiary 80 m
i 70 m
, druga – 100 m
i 75 m
lub pierwsza działka ma wymiary 280 m
i 20 m
, druga – 300 m
i 25 m
.