Przykłady

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych

Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych. Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi kątów w trójkącie prostokątnym.

Przykłady

Przykład 1

Na podstawie spostrzeżeń poczynionych w poprzednich przykładach, uzupełnimy tabelkę, wpisując wartości sinusa, cosinusa i tangensa kątów: $30°$
, $45°$
, $60°$
.

Tabela 0.1

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład 2

Trójkąt na rysunku jest prostokątny.

Dla tego trójkąta zachodzą następujące związki trygonometryczne:

$$\sin\alpha = \frac{8}{17},\ \cos\alpha = \frac{15}{17},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$$

oraz

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{15}{17},\ \cos(90° - \alpha) = \frac{8}{17}, \mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{15}{8}.$$

Przykład 3

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α
, przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta ma długość 5
, a druga przyprostokątna ma długość 4
. Wtedy

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{4}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej c
tego trójkąta

$$c^2 = 4^2 + 5^2.$$

Ponieważ $c > 0$,

stąd

$$c = \sqrt{41}.$$

Zatem

$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}},\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}},$$

czyli

$$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{41}}{41},\ \cos\alpha = \frac{4\sqrt{41}}{41}.$$

Przykład 4

Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{2\sin42° + 3\cos48°}{5\cos48° - 4\sin42°}.$$

Zauważmy, że

$$42° + 48° = 90°.$$

Wobec tego

$$\cos48° = \cos(90° - 42°) = \sin42°,$$

a zatem

$$\frac{2\sin42° + 3\cos48°}{5\cos48° - 4\sin42°} = \frac{2\sin42° + 3\sin42°}{5\sin42° - 4\sin42°} = \frac{5\sin42°}{\sin42°} = 5.$$

Przykład 5

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Znajdziemy wartości $\cos\alpha$ i $\text{tg}\alpha$.

Wystarczy w tym celu rozpatrzyć dowolny trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{2}{3}$. Najprostszym przykładem jest trójkąt o przeciwprostokątnej długości 3 i jednej z przyprostokątnych długości 2. Kąt α leży wtedy naprzeciwko tej przyprostokątnej.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość b drugiej przyprostokątnej

$$2^2 + b^2 = 3^2.$$

Ponieważ $b > 0$, stąd

$$b = \sqrt{5}.$$

Zatem

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

czyli

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Przykład 6

Wykażemy, że jeżeli kąt α
jest ostry i $\cos\alpha = \frac{2}{5}$
, to $\alpha > 60°$
.
Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC
, w którym $|AC| = 2$
i $|AB| = 5$
. Wtedy $\cos(\measuredangle BAC) = \frac{2}{5}$
, co oznacza, że miary kątów $|\measuredangle BAC|$
i α
są równe.

Wybierzmy na przyprostokątnej BC
taki punkt D
, że $|AD| = 4$
.

Wówczas $\cos(\measuredangle DAC) = \frac{2}{4}$
, czyli $\cos(\measuredangle DAC) = \frac{1}{2}$
, więc $|\measuredangle DAC| = 60°$
. Ponieważ $|\measuredangle DAC| < |\measuredangle BAC|$
, to $60° < \alpha$
. Koniec dowodu.
Uwaga. Zestaw wzorów, przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki, zawiera tablicę wartości funkcji trygonometrycznych. Można z niej odczytać, że $\cos 68° \approx 0{,}4040$
i $\cos 69° \approx 0{,}3839$
. Wynika stąd, że kąt ostry α
, dla którego $\cos\alpha = 0{,}4$
, jest kątem z przedziału $(68°, 69°)$
.