Ustalanie na ile sposobów z ustalonego zbioru można wybrać podzbiór o konkretnej liczbie elementów. Definicja liczby k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego. Przykłady z zakresu rozszerzonego.
Obliczanie liczby wszystkich podzbiorów zbiorów skończonych. Przykłady z zakresu rozszerzonego.
Twierdzenie: k-elementowa kombinacja zbioru n-elementowego. Przykłady na zastosowanie twierdzenia o liczbie kombinacji. Zakres rozszerzony.
Wyprowadzenie wzoru na (x+1) do potęgi czwartej. Wyprowadzanie wzoru na dwumianowy Newtona. Zakres rozszerzony.

Można obliczyć, ile jest wszystkich podzbiorów pewnych zbiorów skończonych.

- pewien zbiór dwuelementowy ma 22=4 podzbiory,
- pewien zbiór czteroelementowy ma 24=16 podzbiorów,
- pewien zbiór pięcioelementowy ma 25=32 podzbiory,
- pewien podzbiór dziewięcioelementowy ma 29=512 podzbiorów.

Ustalając liczbę podzbiorów zauważaliśmy, że w stosunku do każdego elementu zbioru możemy na dwa sposoby podjąć decyzję o jego wyborze do tworzonego podzbioru.

> Rozpatrzmy teraz zbiór A=a1,a2,...,an, który ma n elementów. Dowolny podzbiór zbioru A tworzymy, podejmując decyzję, czy każdy z kolejnych elementów zbioru A: a1,a2,...,an należy do tego podzbioru, czy nie należy. Można to zrobić na 2·2·...·2⏟n czynników=2n sposobów.
> Zatem liczba wszystkich podzbiorów zbioru A, który ma n elementów, jest równa 2n.

W przykładach prezentowanych w tym rozdziale często spotykaliśmy się z koniecznością obliczenia, na ile sposobów możemy z ustalonego zbioru wybrać podzbiór o konkretnej liczbie elementów.

> Rozpatrzmy zbiór A=a1,a2,...,an, który ma n elementów. Wtedy, jak to już pokazywaliśmy w rozwiązaniach przykładów tego rozdziału:
>
> - jest jeden podzbiór zbioru A, do którego nie wybierzemy żadnego elementu ze zbioru A (tym podzbiorem jest zbiór pusty),
> - jest jeden podzbiór zbioru A, do którego wybierzemy każdy element zbioru A (tym podzbiorem jest cały zbiór A),
> - jest n wszystkich podzbiorów jednoelementowych zbioru A,
> - jest n·n-12wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru A.
>
> Rozumując podobnie jak w rozwiązaniu metodą dopełniania podzbiorów do całego zbioru i zasadą równoliczności, stwierdzimy też, że
>
> - jest n wszystkich podzbiorów (n-1)-elementowych zbioru A,
> - jest n·n-12 wszystkich podzbiorów (n-2)-elementowych zbioru A.

> Rozpatrzmy zbiór A=a1,a2,...,an, który ma n (n≥1) elementów.
> Symbolem nk oznaczamy liczbę jego wszystkich podzbiorów k−elementowych (k≥0 i k≤n) .
> Zapis symboliczny nk odczytujemy „n po k”, stąd np.:
>
> - 52 czytamy „pięć po dwa”,
> - 71 czytamy „siedem po jeden”,
> - 60 czytamy „sześć po zero”.

Stosując to oznaczenie, stwierdzimy, że:

gdy n≥2
W szczególności:

Rozszerza się też (z czego my nie będziemy korzystać) stosowanie tego symbolu na:

- podzbiór pusty zbioru pustego, przyjmując 00=1,
- przypadek, gdy k>n, wtedy przyjmujemy nk=0.

> Każdy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego (0≤k≤ n) nazywa się zwyczajowo k-elementową kombinacją zbioru n-elementowego.

Pokażemy, że liczba wszystkich k–elementowych podzbiorów, które można wybrać ze zbioru A=a1,a2,...,an liczącego n elementów, jest równa n!k!·n-k!. Przypomnijmy, że przez nk umówiliśmy się oznaczać liczbę wszystkich możliwych k–elementowych podzbiorów zbioru A.

Dla dowodu zauważmy, że liczba wszystkich możliwych k–elementowych ciągów utworzonych z różnych elementów zbioru A jest z jednej strony równa

a z drugiej strony – jest równa

ponieważ w każdym z k–elementowych podzbiorów zbioru A możemy ustalić kolejność elementów na

sposobów.
Otrzymujemy więc równość

stąd

Na podstawie spostrzeżenia poczynionego powyżej mamy twierdzenie.

> Liczba nk wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego jest równa

> Pokażemy kilka zastosowań twierdzenia o liczbie kombinacji.
>
> 1. Do turnieju koszykówki, rozgrywanego systemem „każdy z każdym" (bez rewanżów), zgłosiło się 12 drużyn.
>   Liczba wszystkich meczów do rozegrania w tym turnieju jest zatem równa 122, czyli 12·112=66.
> 2. Z pudełka, w którym znajduje się 20 kul ponumerowanych od 1 do 20 mamy wylosować 3 kule.
>   Każdy wynik takiego losowania to trzyelementowy podzbiór zbioru dwudziestoelementowego, zatem liczba sposobów, na które można to zrobić, jest równa 203. Ta liczba jest więc równa20!3!·17!=20·19·183·2·1=1140.
> 3. Na okręgu zaznaczono 11 różnych punktów. Obliczamy, ile jest wszystkich czworokątów wypukłych, których wierzchołkami są punkty wybrane spośród tych zaznaczonych.
>   Ponieważ wybierając dowolne cztery z tych jedenastu punktów na dokładnie jeden sposób, połączymy je tak, aby otrzymać kolejne boki czworokąta wypukłego, więc szukana liczba wszystkich czworokątów to 114, co jest równe11!4!·7!=11·10·9·84·3·2·1=330.
> 4. Spośród uczniów 37-osobowej klasy należy wybrać 5-osobową delegację.
>   Można to zrobić na 375 sposobów, co jest równe 37!5!·32!=37·36·35·34·335·4·3·2·1=435897 (to prawie pół miliona sposobów).
> 5. W pewnej grze losowej należy wybrać 6 liczb ze zbioru {1, 2, 3, ..., 49}. Liczba sposobów, na które można tego dokonać jest równa 496, czyli 49!6!·43!=49·48·47·46·45·446·5·4·3·2·1=13983816 (to liczba bliska 14 milionom).

6. W rozdaniu brydżowym gracz otrzymuje 13 kart wybranych losowo z talii 52 kart. Liczba wszystkich układów kart możliwych do otrzymania przez brydżystę jest więc równa 5213, czyli 52!13!·39!=52·51·50·49·48·47·46·45·44·43·42·41·4013·12·11·10·9·8·7·6·5·4·3·2·1=635013559600 (to ponad 635 miliardów układów).

Rozpatrzmy równanie

gdzie każda z liczb x1,x2,x3,x4,x5,x6 jest całkowita i nieujemna.
Wykażemy, że jest 3003 wszystkich rozwiązań tego równania.

Skorzystamy z pomysłu przedstawionego w Uwadze do podpunktu a) przykładu 13.
Rozpatrzmy pomocniczo wszystkie wyniki piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów.
Oznaczmy przez:
x1 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach do momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę,
x2 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono pierwszą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę,
x3 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono drugą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę,
x4 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono trzecią reszkę, do momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę,
x5 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono czwartą reszkę, do momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę,
x6 – liczbę orłów uzyskanych w kolejnych rzutach od momentu, w którym wyrzucono piątą reszkę.
Wtedy

- każdemu wynikowi takiego rzutu monetą odpowiada dokładnie jeden ciąg x1,x2,x3,x4,x5,x6,
- każdemu ciągowi x1,x2,x3,x4,x5,x6 odpowiada jeden wynik piętnastokrotnego rzutu monetą, w którym wypadło dokładnie 10 orłów.

Ponieważ jest 1510=15!10!·5!=15·14·13·12·115·4·3·2·1=3003 wszystkich wyników piętnastokrotnego rzutu monetą, w których wypadło dokładnie 10 orłów, więc również tyle jest rozwiązań równania x1+x2+x3+x4+x5+x6=10 w nieujemnych liczbach całkowitych.
Rozumując podobnie, można też wykazać, że równanie x1+x2+x3+...+xn=k, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą, a każda z liczb x1,x2,x3,...,xn jest całkowita i nieujemna, ma dokładnie n+k-1k rozwiązań.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:
x+14=x4+4x3+6x2+4x+1

- sposób I (algebraiczny)
  Zapisujemy równość
  x+14=x+1·x+1·x+1·x+1.
  Po wymnożeniu wyrażeń zapisanych w nawiasach po prawej stronie tej równości i pogrupowaniu wyrazów podobnych otrzymamy wyrażenie (wielomian zmiennej x), w którym wystąpią jednomiany zmiennej x.
  Czynność taką można wykonać, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:
  x+14=x+1·x+1·x+1·x+1=x+13·x+1=x3+3x2+3x+1·x+1==x3+3x2+3x+1·x+x3+3x2+3x+1·1= x4+3x3+3x2+x+x3+3x2+3x+1=x4+4x3+6x2+4x+1lub
  ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:
  x+14=x+122=x2+2x+12=x2+2x+12=x22+2·x2·2x+1+2x+12==x4+4x3+2x2+4x2+4x+1=x4+4x3+6x2+4x+1.
- sposób II (kombinatoryczny)
  Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu
  x+1·x+1·x+1·x+1, dostaniemy za każdym razem mnożenie czterech czynników. Wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie xk, gdzie k jest równe 4, 3, 2, 1 lub 0. Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażeń wybieranych z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na 24=16 sposobów.
  Rozróżniamy pięć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x –można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x4, co można też

zapisać jako 44·x4·10,
2. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1, a więc można to zrobić na 4 sposoby. Zatem łącznie otrzymamy 4x3, co można też zapisać jako 43·x3·11,
3. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na 4·32=6 sposobów. Łącznie otrzymamy więc 6x2, co można też zapisać jako 42·x2·12,
4. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 4 sposoby. Łącznie otrzymamy więc 4x, co można też zapisać jako 41·x1·13,
5. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1, co można też zapisać jako 40·x0·14.
   Ostatecznie stwierdzamy, że
   x+14=x4+4x3+6x2+4x+1.Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci
   x+14=44·x4·10+43·x3·11+42·x2·12+41·x1·13+40·x0·14

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:
x+15=x5+5x4+10x3+10x2+5x+1.

- sposób I (algebraiczny)
  x+15=x+14·x+1=x4+4x3+6x2+4x+1·x+1 =x5+4x4+6x3+4x2+x+x4+4x3+6x2+4x+1= x5+5x4+10x3+10x2+5x+1.
- sposób II (kombinatoryczny)
  Zauważmy, że mnożąc wyrażenia wybierane z każdego z kolejnych nawiasów iloczynu
  x+1·x+1·x+1·x+1·x+1
  dostaniemy za każdym razem do pomnożenia pięć czynników, przy czym każdy z nich to x albo 1. Zatem wynikiem każdego takiego mnożenia jest wyrażenie xk, gdzie k jest równe 5, 4, 3, 2, 1 lub 0. Wykonajmy więc wszystkie możliwe mnożenia wyrażeń wybieranych z kolejnych nawiasów – możemy to zrobić na 25=32 sposoby.
  Rozróżniamy sześć przypadków:

1. ze wszystkich nawiasów wybraliśmy x –można to zrobić na jeden sposób, a w wyniku otrzymamy x5, co można też zapisać jako 55·x5·10,
2. z dokładnie czterech nawiasów wybraliśmy x – wtedy z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy 1, a więc można to zrobić na 5 sposobów. Zatem łącznie otrzymamy 5x4, co można też zapisać jako 54·x4·11,
3. z dokładnie trzech nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na 53=5·4·33·2=10 sposobów. Łącznie otrzymamy więc 10x3, co można też zapisać jako 53·x3·12,
4. z dokładnie dwóch nawiasów wybraliśmy x – można to zrobić na 5·42=10 sposobów. Łącznie otrzymamy więc 10x2, co można też zapisać jako 52·x3·12,
5. z dokładnie jednego nawiasu wybraliśmy x – można to zrobić na 5 sposobów. Łącznie otrzymamy więc 5x, co można też zapisać jako 51·x1·14,
6. z żadnego z nawiasów nie wybraliśmy x – można to zrobić na 1 sposób. Wtedy z każdego z nawiasów musimy wybrać jedynkę, więc w wyniku mnożenia otrzymamy 1, co można też zapisać jako 50·x0·15.
   Ostatecznie stwierdzamy, że
   x+15=x5+5x4+10x3+10x2+5x+1.
   Otrzymaną tożsamość możemy też zapisać w postaci
   x+15=55·x5·10+54·x4·11+53·x3·12+52·x2·13+51·x1·14+50·x0·15.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x:

- sposób I
  Najpierw pokazujemy, że
  x+16=x+15·x+1=x5+5x4+10x3+10x2+5x+1·x+1=x6+6x5+15x4+20x3+15x2+6x+1.
  Stąd
  x+17=x+16·x+1=x6+6x5+15x4+20x3+15x2+6x+1·x+1=

=x7+7x6+21x5+35x4+35x3+21x2+7x+1.

- sposób II
  Korzystając z pomysłów przedstawionych w sposobie II rozwiązania poprzednich podpunktów, pokazujemy, że
  x+17=

=77·x7·10+76·x6·11+75·x5·12+74·x4·13+73·x3·14+72·x2·15+71·x1·16+70·x0·17.
Ponieważ 77=70=1, 76=71=7, 75=72=7·62=21, 74=73=7·6·53·2·1=35, więc otrzymujemy
x+17=x7+7x6+21x5+35x4+35x3+21x2+7x+1.
Rozumując podobnie jak w sposobie II rozwiązań przedstawionych w powyższym przykładzie, można pokazać, że dla

dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz dowolnych liczb całkowitych a oraz b prawdziwa jest równość

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

Wzór ten jest nazywany wzorem dwumianowym Newtona.

W szczególności dla $a=b=1$ otrzymujemy

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

Otrzymana równość uzasadnia znany nam już fakt, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru n–elementowego jest równa 2^n.