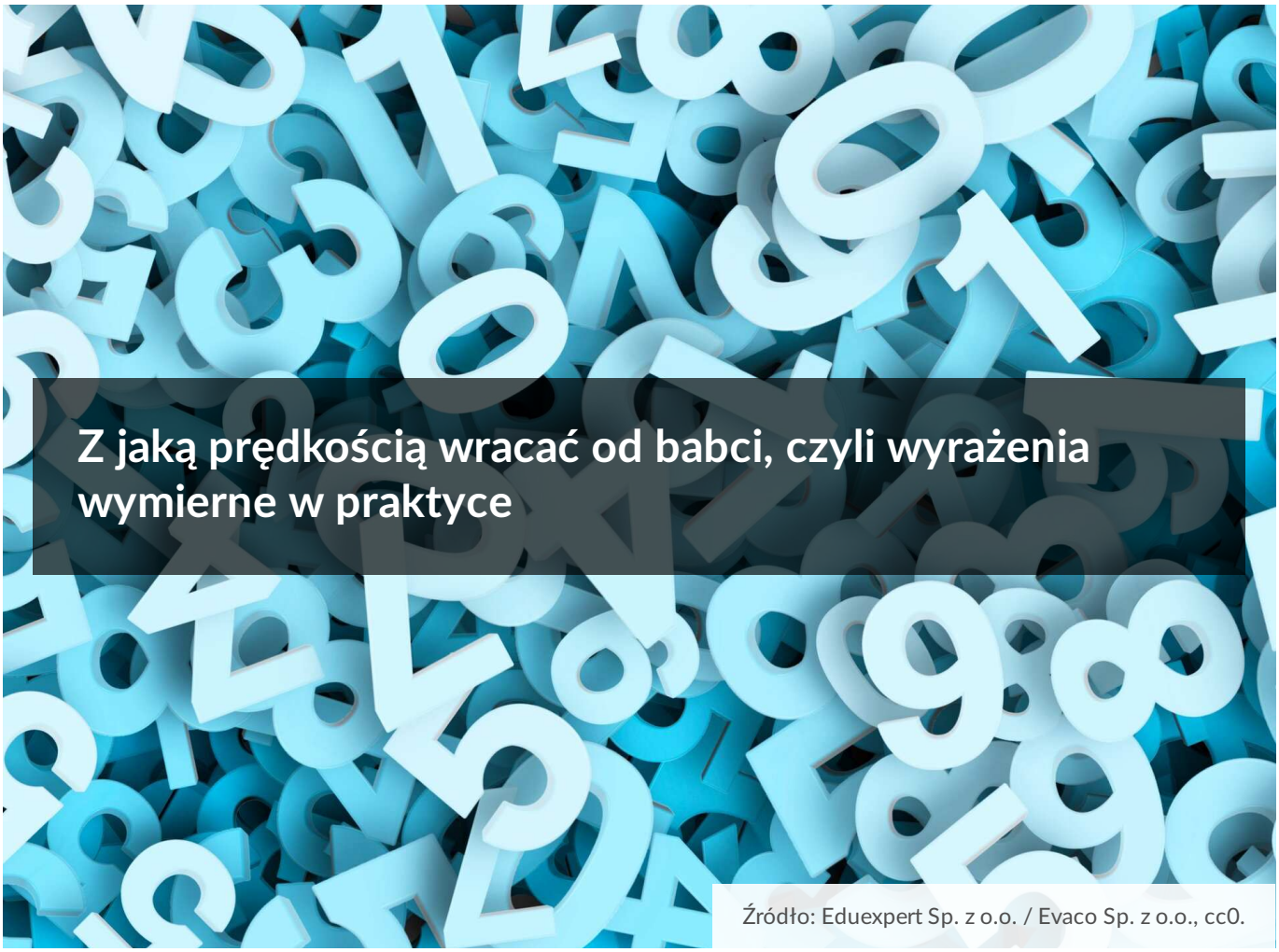


Z jaką prędkością wracać od babci, czyli wyrażenia wymierne w praktyce



Z jaką prędkością wracać od babci, czyli wyrażenia wymierne w praktyce

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., cc0.

Wstęp

Niekiedy zdarza się, że po przeanalizowaniu danych uzyskanych w efekcie przeprowadzonego doświadczenia, otrzymujemy zaskakujące wyniki. I to zdawałoby się sprzeczne ze zdrowym rozsądkiem.
Przykładem takiego dysonansu poznawczego jest odkrycie, że średnia prędkość poruszających się pojazdów na drodze „tam" i „z powrotem" nie jest średnią arytmetyczną prędkości na poszczególnych odcinkach drogi.
Warto wtedy skorzystać z prostych narzędzi statystycznych, pozwalających na sprawdzenie poprawności poczynionych obserwacji.



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

> **Nauczysz się**
>
> sformułujesz i uzasadnisz wnioski na podstawie wykonywanych doświadczeń;
>
> opiszesz prowadzone rozumowania językiem matematyki;
>
> wykorzystasz narzędzia prawdopodobieństwa do wyboru najlepszego rozwiązania w sytuacjach z życia codziennego.

Cele edukacyjne zgodne z etapem kształcenia
Po zapoznaniu się z e-materiałem uczeń:
dobiera i tworzy modele matematyczne przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Z JAKĄ PRĘDKOŚCIĄ WRACAĆ OD BABCI, CZYLI WYRAŻENIA WYMIERNE W PRAKTYCE – *audiobook*

Rozdziały:

1. **Uliczna ankieta**
2. **Średnia harmoniczna**
3. **Podsumowanie**

> **Notatka dla prowadzącego**

Wskazówka

Słuchając audiobooka, zwróćcie uwagę na sytuacje, w których intuicyjnie chcemy zastosować średnią arytmetyczną, co w konsekwencji może doprowadzić nas do uzyskania wyniku znacznie odbiegającego od poprawnego.

Przed wysłuchaniem nagrania porozmawiajcie o znanych wam, wykorzystywanych w statystyce, miarach położenia i ich zastosowaniach. Przypomnijcie sobie również, jaka jest zależność między drogą, prędkością, a czasem w ruchu jednostajnym.

Audiobook można wysłuchać pod adresem: https://zpe.gov.pl/b/PRR1tVRVv

Z jaką prędkością wracać od babci, czyli wyrażenia wymierne w praktyce

Rozdział 1
Uliczna ankieta

Marcin opowiada o wynikach sondażu, który przeprowadził.

Witam wszystkich bardzo serdecznie. Mam na imię Marcin i chciałbym przedstawić wam wyniki sondażu, który przeprowadziłem wczoraj w naszym mieście. Stu przechodniów poprosiłem o rozwiązanie następującego zadania:

W środę pojechałem rowerem do babci. W jedną stronę jechałem z prędkością 20 kilometrów na godzinę. Z powrotem było z górki, więc jechałem znacznie szybciej, z prędkością 30 kilometrów na godzinę. Z jaką średnią prędkością przebyłem całą trasę „tam" i „z powrotem"?

Dziewięćdziesiąt pięć osób obliczyło średnią arytmetyczną liczb 20 i 30, czyli dwadzieścia dodać trzydzieści równa się pięćdziesiąt, pięćdziesiąt podzielić przez dwa równa się dwadzieścia pięć, i uznało, że poruszałem się ze średnią prędkością 25 kilometrów na godzinę. Tylko pięć osób podało inny wynik. Cztery stwierdziły, że średnia prędkość to 24 kilometry na godzinę. Jedna orzekła, że wynosiła ona 0 kilometrów na godzinę i upierała się, że ma rację.

Jak myślicie, który wynik jest poprawny: 25 kilometrów na godzinę czy 24 kilometry na godzinę? A może wręcz 0 kilometrów na godzinę? Przeanalizujcie problem w grupach i zaprezentujcie innym wasze obliczenia.

Rozdział 2
Średnia harmoniczna

Rozmowa Marcina z ekspertem w zakresie statystyki i matematyki.

— Aby ostatecznie rozstrzygnąć, z jaką średnią prędkością jechałem do babci i z powrotem, poprosiłem o pomoc eksperta panią Ewę, która jest nie tylko matematykiem, ale również fizykiem. Pani Ewo, czy może nam pani wyjaśnić, skąd wzięła się niespójność w wynikach uzyskanych przez ankietowanych?

— To bardzo proste. Większość respondentów analizując zadanie, zauważyła, że długość drogi, jaką przebyłeś, jadąc do babci, była równa długości drogi, jaką przebyłeś w drodze powrotnej. Osoby te przyjęły więc za pewnik, że ta wielkość nie odgrywa

istotnej roli w obliczeniach i pominęły ją. Średnią prędkość obliczyły, opierając się na znanych analogiach, np. obliczaniu średniej ocen. Korzystały więc ze średniej arytmetycznej i otrzymały rozwiązanie: 25 kilometrów na godzinę.

— Więc ten wynik jest poprawny?

— Niestety, nie.

— Gdzie zatem tkwi błąd w rozumowaniu?

— Czy pamiętasz, czym jest prędkość w ruchu jednostajnym?

— Tak. Można powiedzieć, że prędkość to zmiana odległości podzielona przez jednostkę czasu, w jakiej została dokonana.

— No właśnie. W rozważanym przez nas przypadku długość drogi „tam" była równa długości drogi z powrotem, ale czas jazdy był inny. Z powrotem jechałeś dużo szybciej, więc pokonałeś trasę w krótszym czasie, niż jadąc z domu do babci.

— Rzeczywiście. Jeśli więc założę, że długość drogi z domu do babci jest równa s, to cała przebyta przeze mnie droga ma długość 2 s. Wtedy czas jazdy „tam" będzie wynosił s podzielić przez 20, a czas jazdy „z powrotem" s podzielić przez 30.

— Oczywiście. Aby obliczyć średnią prędkość należy podzielić długość drogi, czyli 2 s przez czas jazdy, czyli sumę, której składniki to s przez 20 i s przez 30.

— Obliczam. Mój wynik to 24 kilometry na godzinę. Czy to już jest prawidłowa odpowiedź?

— I tak, i nie.

— Jak to?

— Fizyk bez wątpienia ustaliłby, że prędkość wynosiła zero kilometrów na godzinę.

— To zaskakujące. Czy może nam pani to dokładnie wyjaśnić?

— Na co dzień posługujemy się naprzemiennie terminami prędkość i szybkość, czyli wartość prędkości. W fizyce jednak terminy te mają inne znaczenia. Szybkość jest wielkością skalarną, czyli liczbą. Prędkość jest natomiast wielkością wektorową. Twoje przemieszczenie w podróży „tam" i „z powrotem" było równe zeru – wyjechałeś z domu i wróciłeś do domu. Stąd wniosek, że twoja średnia prędkość też była równa zeru.

— Ale średnia szybkość była równa 24 kilometry na godzinę?

— Tak. Doskonale zrozumiałeś różnicę między średnią prędkością, a średnią szybkością. Aby obliczyć średnią szybkość, utożsamianą zwykle ze średnią prędkością, wykorzystaliśmy wzór na średnią harmoniczną dwóch wielkości. Zauważ, że średnia harmoniczna w naszym przypadku była mniejsza niż średnia arytmetyczna tych samych wielkości. Czy jest tak zawsze – przedyskutuj ten problem z kolegami z klasy.

— Bardzo dziękuję za interesującą rozmowę i rozwiązanie nurtującego mnie problemu. Przy okazji uświadomiła mi też pani, że przeprowadzając sondaż, należy doprecyzować zawarte w nim pytania.

Rozdział 3
Podsumowanie

Marcin podsumowuje rezultaty ankiety i rozmowy z ekspertem.

Rozmowa z naszym ekspertem zainspirowała mnie do poszukania wiadomości na temat średniej harmonicznej. W badaniach statystycznych średnia harmoniczna jest miarą położenia rozkładu, podobnie jak średnia arytmetyczna. Stosuje się ją, gdy wartości zmiennej podane są w jednostkach względnych (np. w km/h).

Średnią harmoniczną liczb dodatnich a_1, a_2, a_3,...,a_n obliczamy jako iloraz liczby wszystkich danych przez sumę ich odwrotności. Średnia harmoniczna n liczb jest nie większa od średniej geometrycznej i nie większa od średniej arytmetycznej tych liczb. Ze średnią harmoniczną mamy do czynienia na przykład obliczając średnią szybkość, czy dobierając oporności oporników w połączeniu równoległym. A teraz zadanie dla was. Do babci pojadę samochodem z prędkością 40 kilometrów na godzinę. Z jaką prędkością muszę wracać od babci, aby moja średnia szybkość na całej trasie była równa 48 kilometrów na godzinę?

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zobacz także

Z jaką prędkością wracać od babci, czyli wyrażenia wymierne w praktyce

Rozdział 1
Uliczna ankieta

Marcin opowiada o wynikach sondażu, który przeprowadził.

Witam wszystkich bardzo serdecznie. Mam na imię Marcin i chciałbym przedstawić wam wyniki sondażu, który przeprowadziłem wczoraj w naszym mieście. Stu przechodniów poprosiłem o rozwiązanie następującego zadania:

W środę pojechałem rowerem do babci. W jedną stronę jechałem z prędkością 20 kilometrów na godzinę. Z powrotem było z górki, więc jechałem znacznie szybciej, z prędkością 30 kilometrów na godzinę. Z jaką średnią prędkością przebyłem całą trasę „tam" i „z powrotem"?

Dziewięćdziesiąt pięć osób obliczyło średnią arytmetyczną liczb 20 i 30, czyli dwadzieścia dodać trzydzieści równa się pięćdziesiąt, pięćdziesiąt podzielić przez dwa równa się dwadzieścia pięć, i uznało, że poruszałem się ze średnią prędkością 25 kilometrów na godzinę. Tylko pięć osób podało inny wynik. Cztery stwierdziły, że średnia prędkość to 24 kilometry na godzinę. Jedna orzekła, że wynosiła ona 0 kilometrów na godzinę i upierała się, że ma rację.

Jak myślicie, który wynik jest poprawny: 25 kilometrów na godzinę czy 24 kilometry na godzinę? A może wręcz 0 kilometrów na godzinę? Przeanalizujcie problem w grupach i zaprezentujcie innym wasze obliczenia.

Rozdział 2
Średnia harmoniczna

Rozmowa Marcina z ekspertem w zakresie statystyki i matematyki.

— Aby ostatecznie rozstrzygnąć, z jaką średnią prędkością jechałem do babci i z powrotem, poprosiłem o pomoc eksperta panią Ewę, która jest nie tylko matematykiem, ale również fizykiem. Pani Ewo, czy może nam pani wyjaśnić, skąd wzięła się niespójność w wynikach uzyskanych przez ankietowanych?

— To bardzo proste. Większość respondentów, analizując zadanie zauważyła, że długość drogi, jaką przebyłeś, jadąc do babci była równa długości drogi, jaką przebyłeś w drodze powrotnej. Osoby te przyjęły więc za pewnik, że ta wielkość nie odgrywa istotnej roli w obliczeniach i pominęły ją. Średnią prędkość obliczyły, opierając się na znanych analogiach, na przykład obliczaniu średniej ocen. Korzystały więc ze średniej arytmetycznej i otrzymały rozwiązanie: 25 kilometrów na godzinę.

— Więc ten wynik jest poprawny?

— Niestety, nie.

— Gdzie zatem tkwi błąd w rozumowaniu?

— Czy pamiętasz czym jest prędkość w ruchu jednostajnym?

— Tak. Można powiedzieć, że prędkość to zmiana odległości podzielona przez jednostkę czasu, w jakiej została dokonana.

— No właśnie. W rozważanym przez nas przypadku, długość drogi „tam" była równa długości drogi „z powrotem", ale czas jazdy był inny. Z powrotem jechałeś dużo szybciej, więc pokonałeś trasę w krótszym czasie, niż jadąc z domu do babci.

— Rzeczywiście. Jeśli więc założę, że długość drogi z domu do babci jest równa s, to cała przebyta przeze mnie droga ma długość 2s. Wtedy czas jazdy „tam" będzie wynosił s podzielić przez 20, a czas jazdy „z powrotem" s podzielić przez 30.

— Oczywiście. Aby obliczyć średnią prędkość należy podzielić długość drogi, czyli 2 s przez czas jazdy, czyli sumę, której składniki to s przez 20 i s przez 30.

— Obliczam. Mój wynik to 24 kilometry na godzinę. Czy to już jest prawidłowa odpowiedź?

— I tak, i nie.

— Jak to?

— Fizyk bez wątpienia ustaliłby, że prędkość wynosiła zero kilometrów na godzinę.

— To zaskakujące. Czy może nam pani to dokładnie wyjaśnić?

— Na co dzień posługujemy się naprzemiennie terminami prędkość i szybkość, czyli wartość prędkości. W fizyce, jednak terminy te mają inne znaczenia. Szybkość jest wielkością skalarną, czyli liczbą. Prędkość jest natomiast wielkością wektorową. Twoje przemieszczenie w podróży „tam" i „z powrotem" było równe zeru – wyjechałeś z domu i wróciłeś do domu. Stąd wniosek, że twoja średnia prędkość też była równa zeru.

— Ale średnia szybkość była równa 24 kilometry na godzinę?

— Tak. Doskonale zrozumiałeś różnicę między średnią prędkością, a średnią szybkością. Aby obliczyć średnią szybkość, utożsamianą zwykle ze średnią prędkością, wykorzystaliśmy wzór na średnią harmoniczną dwóch wielkości. Zauważ, że średnia harmoniczna w naszym przypadku była mniejsza niż średnia arytmetyczna tych samych wielkości. Czy jest tak zawsze – przedyskutuj ten problem z kolegami z klasy.

— Bardzo dziękuję za interesującą rozmowę i rozwiązanie nurtującego mnie problemu. Przy okazji uświadomiła mi też pani, że przeprowadzając sondaż należy doprecyzować zawarte w nim pytania.

Rozdział 3
Podsumowanie

Marcin podsumowuje rezultaty ankiety i rozmowy z ekspertem.

Rozmowa z naszym ekspertem zainspirowała mnie do poszukania wiadomości na temat średniej harmonicznej. W badaniach statystycznych średnia harmoniczna jest miarą położenia rozkładu, podobnie jak średnia arytmetyczna. Stosuje się ją, gdy wartości zmiennej podane są w jednostkach względnych (na przykład w km/h).

Średnią harmoniczną liczb dodatnich a_1, a_2, a_3,...,a_n obliczamy jako iloraz liczby wszystkich danych przez sumę ich odwrotności. Średnia harmoniczna n liczb jest nie większa od średniej geometrycznej i nie większa od średniej arytmetycznej tych liczb. Ze średnią harmoniczną mamy do czynienia na przykład obliczając średnią szybkość, czy dobierając oporności oporników w połączeniu równoległym. A teraz zadanie dla was. Do babci pojadę samochodem z prędkością 40 kilometrów na godzinę. Z jaką prędkością muszę wracać od babci, aby moja średnia szybkość na całej trasie była równa 48 kilometrów na godzinę?

Polecenie 1

Oblicz szybkość średnią każdego z rowerzystów, jeżeli rowerzysta A od godziny 13.00 do godziny 14.00 jechał z szybkością 15 km/h, a od godziny 14.00 do godziny 15.00 jechał z szybkością 25 km/h, rowerzysta B przez 10 km jechał z szybkością 10 km/h, a przez następne 10 km z szybkością 30 km/h, rowerzysta C godzinę jechał z szybkością 20 km/h, a przez następne 10 km jechał z szybkością 20 km/h.

Polecenie 2

Wykaż, że dla dodatnich liczb a i b

a) zachodzi nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

b) zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

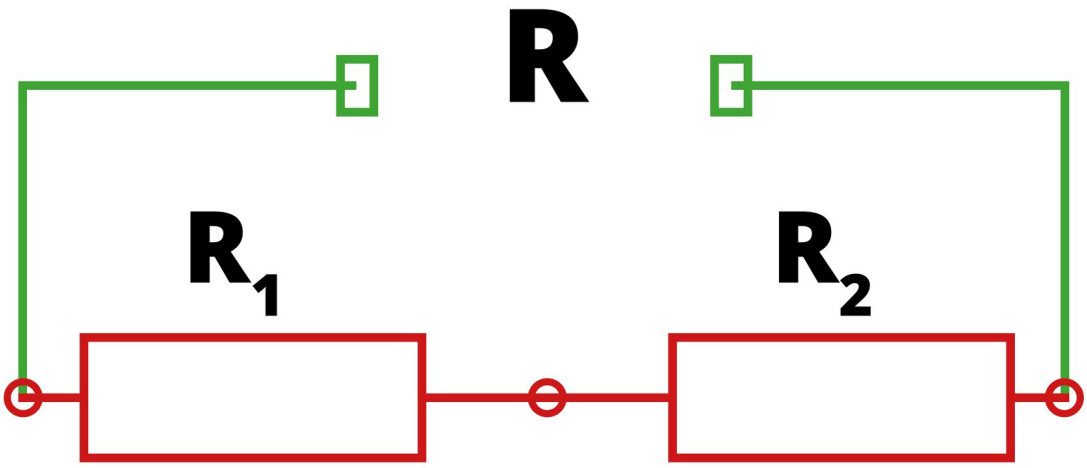
c) odwrotność średniej arytmetycznej tych liczb jest równa średniej harmonicznej odwrotności tych liczb.

Polecenie 3

Jak dobrać oporności trzech oporników o łącznym oporze 18 Ω, połączonych równolegle, aby opór zastępczy był największy?

Wskazówka 1
Skorzystaj z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną.

Połączenie szeregowe



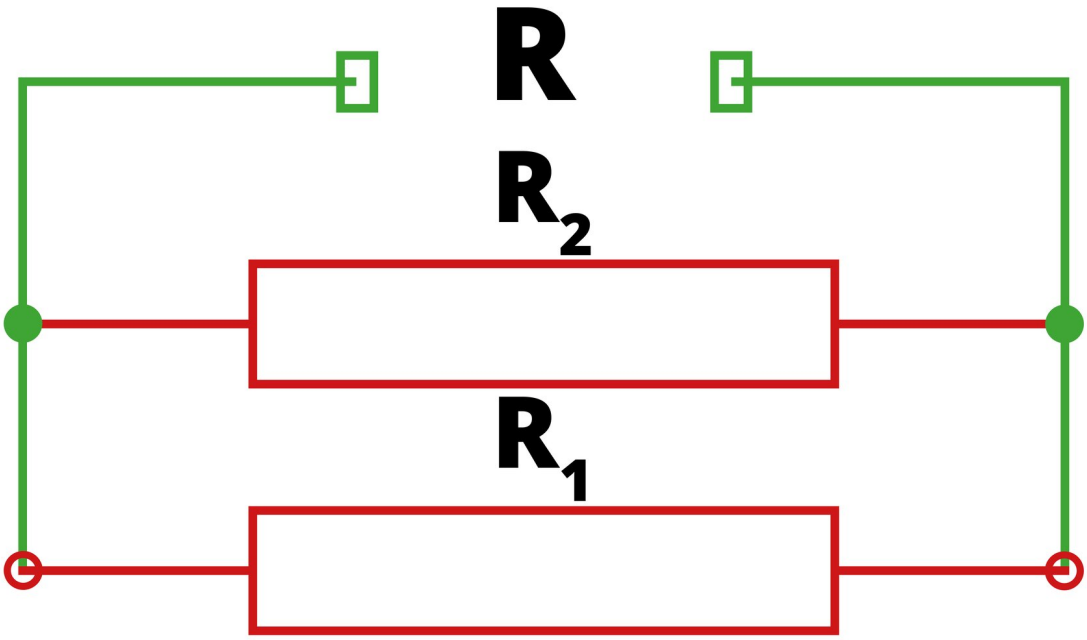
Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Opór zastępczy R oporów R_1, R_2 połączonych szeregowo, wyraża się wzorem

$$R = R_1 + R_2$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Połączenie równoległe



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Opór zastępczy R oporów R_1, R_2 połączonych równolegle, wyraża się wzorem

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Podsumowanie

Średnia harmoniczna jest jednym z parametrów statystycznych. Stosuje się ją, gdy wartości zmiennej podane są w jednostkach względnych (np. km/h).
Średnią harmoniczną liczb dodatnich

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

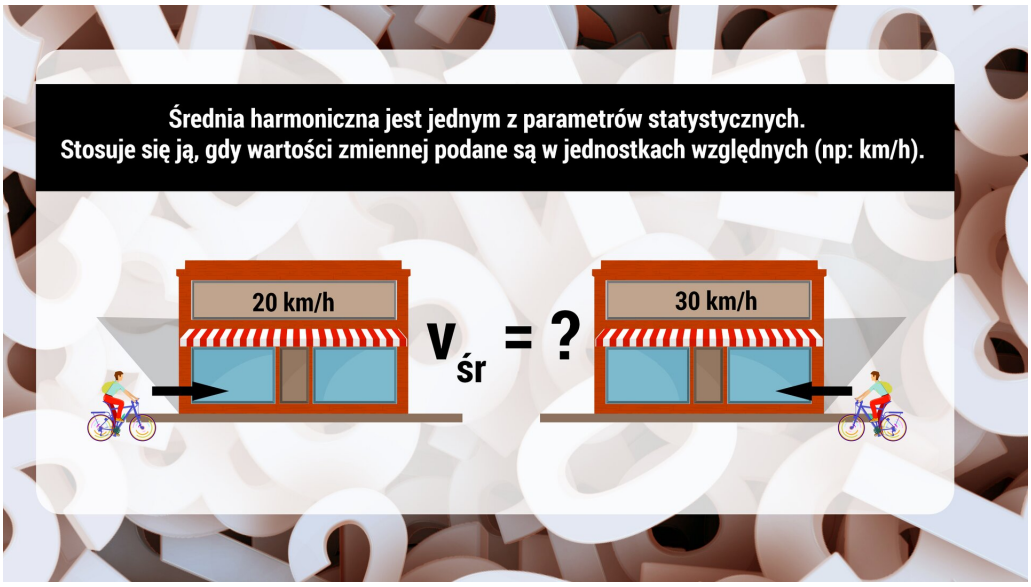
Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

obliczamy jako iloraz liczby wszystkich danych przez sumę ich odwrotności

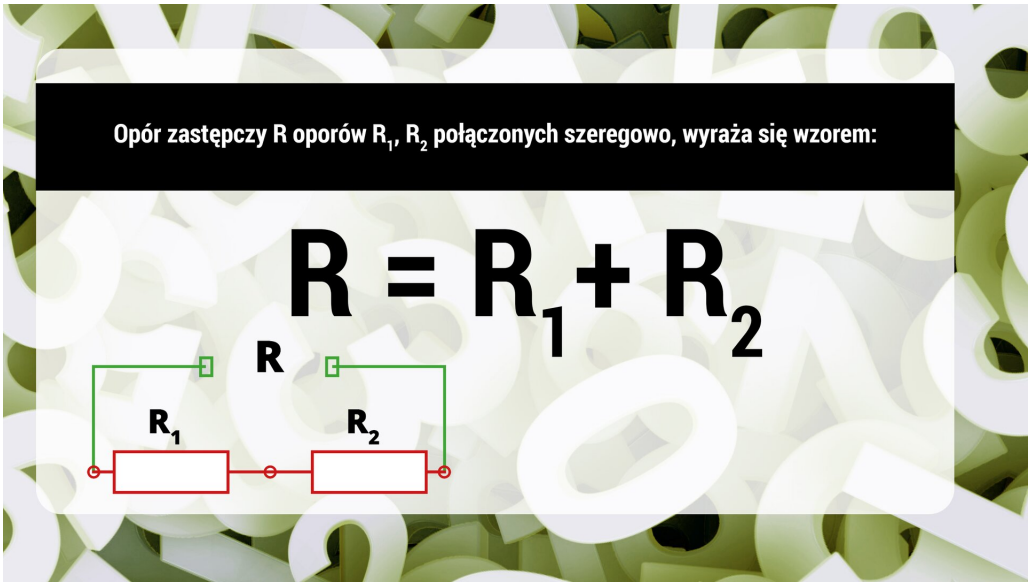
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

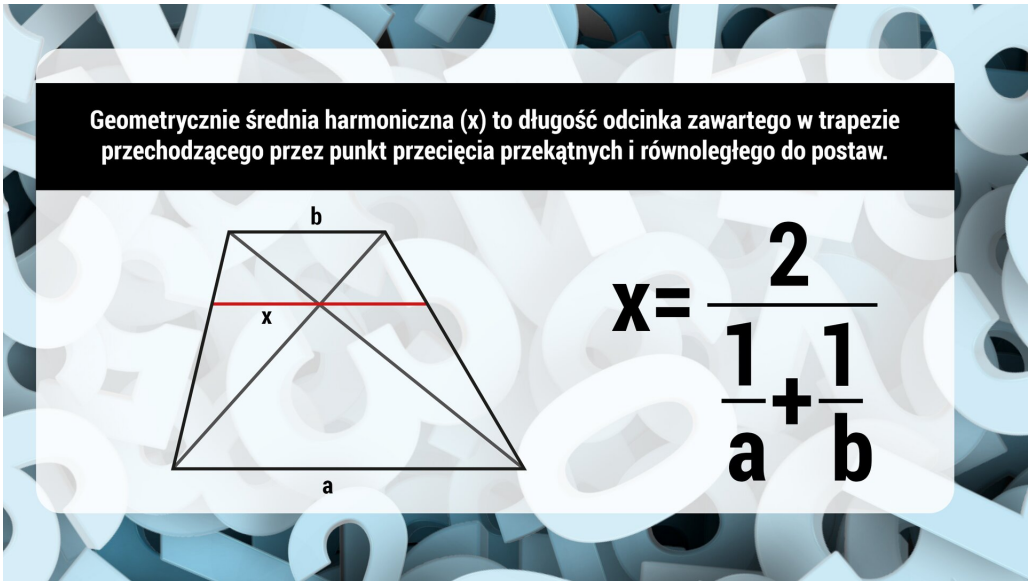
Geometrycznie średnia harmoniczna to długość odcinka zawartego w trapezie, przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych trapezu i równoległego do postaw.



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.



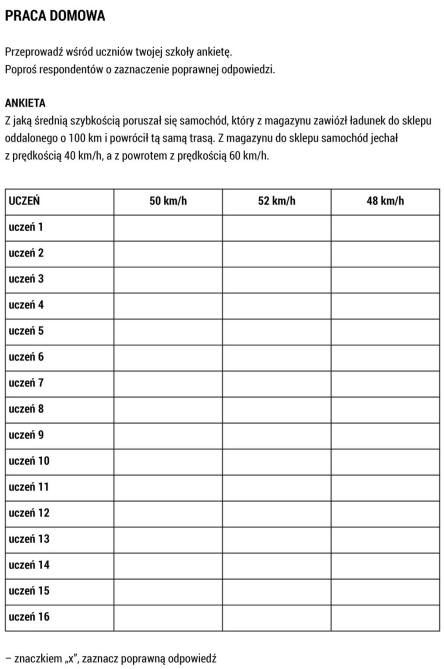
Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Praca domowa

Polecenie 4.1

Zadanie 1.

Przeprowadź wśród uczniów twojej szkoły ankietę, w której zapytasz o średnią szybkość, z jaką poruszał się samochód, który z magazynu zawiózł ładunek do sklepu oddalonego o 100 km i powrócił tą samą trasą. Z magazynu do sklepu samochód jechał z prędkością 40 km/h, a z powrotem z prędkością 60 km/h.



PRACA DOMOWA

Przeprowadź wśród uczniów twojej szkoły ankietę.
Poproś respondentów o zaznaczenie poprawnej odpowiedzi.

ANKIETA
Z jaką średnią szybkością poruszał się samochód, który z magazynu zawiózł ładunek do sklepu oddalonego o 100 km i powrócił tą samą trasą. Z magazynu do sklepu samochód jechał z prędkością 40 km/h, a z powrotem z prędkością 60 km/h.

UCZEŃ	50 km/h	52 km/h	48 km/h
uczeń 1			
uczeń 2			
uczeń 3			
uczeń 4			
uczeń 5			
uczeń 6			
uczeń 7			
uczeń 8			
uczeń 9			
uczeń 10			
uczeń 11			
uczeń 12			
uczeń 13			
uczeń 14			
uczeń 15			
uczeń 16			

– znaczkiem „x", zaznacz poprawną odpowiedź

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.
Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Zadania

Ćwiczenie 1

Oblicz średnią arytmetyczną poniższych liczb.

2, 10

12, 10, 8

5, 5, 5

4, 4, 4

1, 9, 8, 2

0, 0, 0

-10, 10

-137, 137, -285, 285

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Oblicz średnią harmoniczną poniższych liczb. Odpowiedzi podaj w postaci ułamków nieskracalnych (do zapisu użyj prawego ukośnika).

2, 10

1, 1

2, 2

5, 10

2, 8

3, 6

1, 5

8, 10

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Średnia harmoniczna liczb 8 i x wynosi 13,44. Wyznacz i wskaż x.

- ◯ 5,44
- ◯ 26,88
- ◯ 10,88
- ◯ 9,44
- ◯ 42,00
- ◯ 10,72
- ◯ 18,88
- ◯ 13,44
- ◯ 21,44

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Słowniczek

Prędkość

Prędkość to wielkość wektorowa. W praktyce szkolnej oblicza się prędkość jako stosunek długości drogi przebytej przez ciało do czasu, w jakim ruch się odbywał.

Średnia harmoniczna

Średnia harmoniczna liczb dodatnich

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

to iloraz liczby wszystkich danych przez sumę ich odwrotności.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Szybkość

Szybkość to wielkość skalarna. Najczęściej przyjmuje się, że jest to wartość liczbowa prędkości.

Powrót do e-podręcznika

E-podręcznik „Odkryj, zrozum, zastosuj...”

https://www.epodreczniki.pl/reader/c/129738/v/22/t/student-canon

3.3. Wyrażenia wymierne. Równania wymierne:

https://www.epodreczniki.pl/reader/c/129738/v/22/t/student-canon/m/iIEiNx2IIi#iIEiNx2IIi_d25e1

3.4. Zastosowanie równań wymiernych do interpretacji zagadnień praktycznych:

https://www.epodreczniki.pl/reader/c/129738/v/22/t/student-canon/m/iYcmaHaJ3L

Źródło: Eduexpert Sp. z o.o. / Evaco Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.