Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Definicja sinusa, definicja cosinusa, definicja tangensa. Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym. Obliczanie wysokości z wykorzystaniem zależności w trójkącie prostokątnym. Ilustracja interaktywna - definicje funkcji trygonometrycznych. 2 animacje -wyznaczanie wysokości piramidy Cheopsa, wyznaczanie wysokości rampy. 3 animacje - prezentacja wykresów funkcji trygonometrycznych.

Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Definicja: Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Załóżmy, że w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę α. Wprowadzimy nazwy stosunków długości boków tego trójkąta.

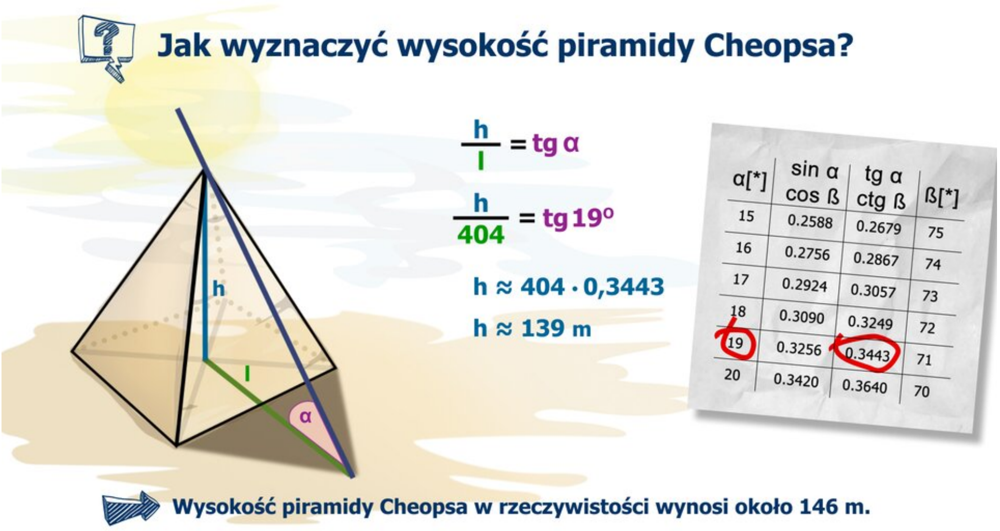
- Sinusem kąta ostrego α (w skrócie $\sin\alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przeciwprostokątnej.
- Cosinusem kąta ostrego α (w skrócie $\cos\alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α do długości przeciwprostokątnej.
- Tangensem kąta ostrego α (w skrócie $\operatorname{tg}\alpha$) nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie α.

Korzystając z oznaczeń na rysunku, zapisujemy

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Powyższe zależności nazywa się funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego α.

Przykład 1



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak wyznaczyć wysokość Piramidy Cheopsa. Długość cienia rzucanego przez wierzchołek piramidy to przeciwprostokątna. Wysokość piramidy h i odległość l od spodka wysokości do końca cienia to przyprostokątne. l =404 metry. Kąt alfa między przyprostokątnymi wynosi 19 stopni. Zapisujemy związek między przyprostokątnymi trójkąta. Korzystając z funkcji tangens z tablic trygonometrycznych odczytujemy wartość kąta 19 stopni i obliczamy, że wysokość Piramidy Cheopsa wynosi 139 metrów.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak wyznaczyć wysokość rampy korzystając z funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Uwaga!

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0.$$

Ponadto, w każdym trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, zatem dla dowolnego kąta ostrego α

$$\sin\alpha < 1, \ \cos\alpha < 1.$$

Twierdzenie: 1

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są nierówności:

$$0 < \sin\alpha < 1$$

$$0 < \cos\alpha < 1.$$

Uwaga!

Jeżeli jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę α, to drugi kąt ostry w tym trójkącie ma miarę $90° - \alpha$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, zapisujemy

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{b}{a}.$$

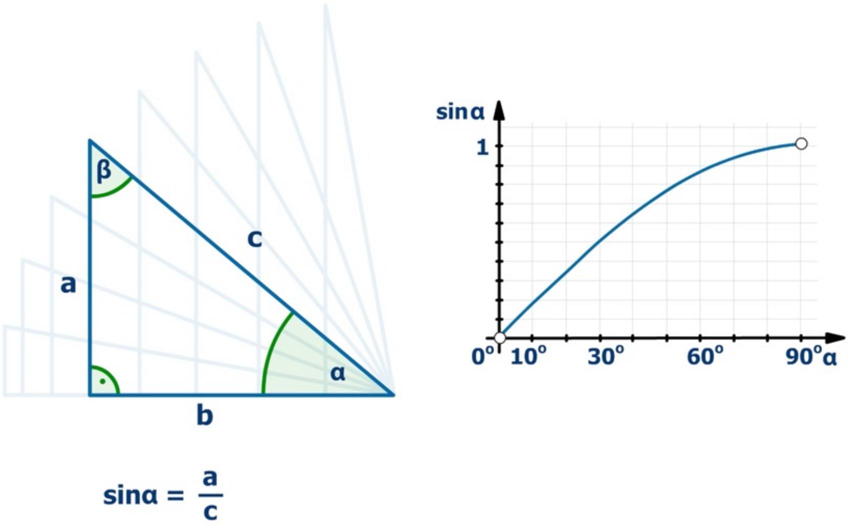
Twierdzenie: 2

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

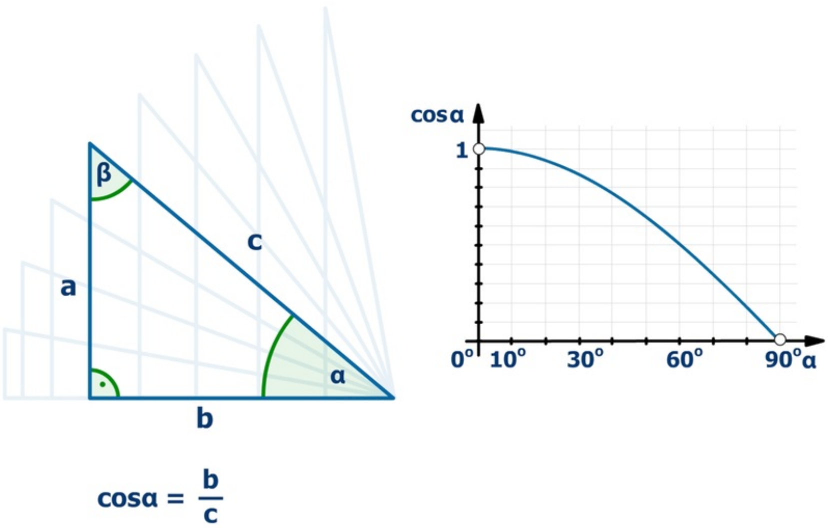
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$



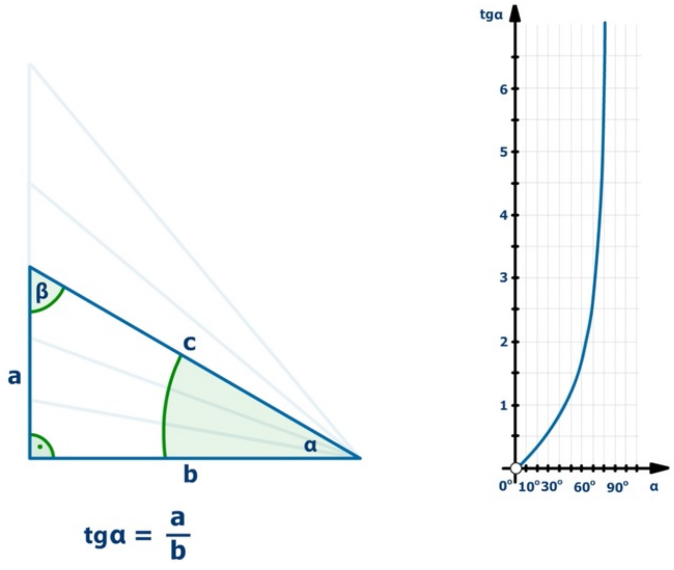
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć sinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnej a i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji sinus i obliczamy wartość funkcji sinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji sinus.



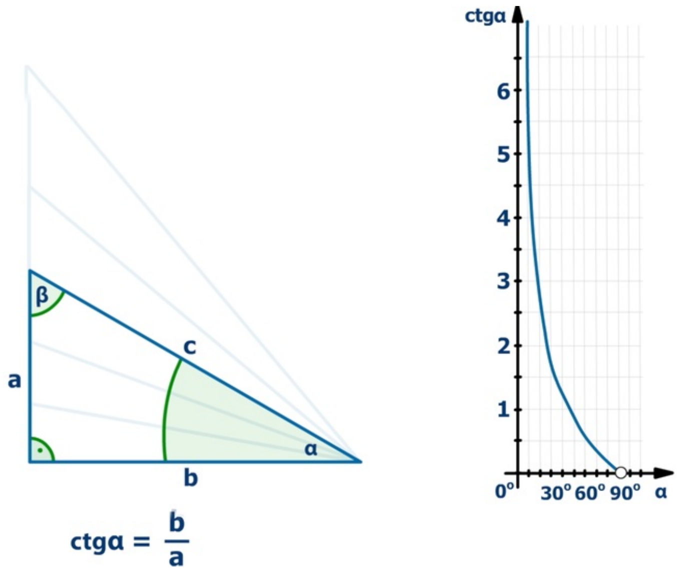
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć cosinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnej b i przeciwprostokątnej c trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Otrzymane liczby wstawiamy do wzoru funkcji cosinus i obliczamy wartość funkcji cosinus dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji cosinus.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć tangens dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Wstawiamy otrzymane liczby do wzoru funkcji tangens i obliczamy wartość funkcji tangens dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji tangens.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje jak obliczyć sinus dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długość a, b i przeciwprostokątnej długość c. Kąt alfa leży naprzeciw przyprostokątnej a, kąt beta leży naprzeciw przyprostokątnej b. Mierzymy linijką długości przyprostokątnych a i b trójkąta prostokątnego dla kątów 10 stopni, 20 stopni, 30 stopni, 40 stopni, 50 stopni, 60 stopni, 80 stopni, 90 stopni. Wstawiamy otrzymane liczby do wzoru funkcji cotangens i obliczamy wartość funkcji cotangens dla danego kąta. Otrzymane wartości tworzą na wykresie fragment funkcji cotangens.
